

Національний університет „Львівська політехніка”

УДК 517.958:536.12:539.3:550.837

**ЖУРАВЧАК**

**Любов Михайлівна**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОВОГО ТА  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛІВ У НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ МЕТОДАМИ  
ПРИГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ**

*01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи*

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Львів-2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Карпатському відділенні Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України та в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Науковий консультант: академік НАН України, доктор технічних наук, професор  
**Григоренко Ярослав Михайлович**, Інститут механіки  
ім. С.П.Тимошенка НАН України, м. Київ, головний науковий  
співробітник відділу обчислювальних методів.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор  
**Булавацький Володимир Михайлович**, Інститут кібернетики  
ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, провідний науковий  
співробітник відділу математичного моделювання проблем екології  
та енергетики;  
доктор технічних наук, професор  
**Дзюба Анатолій Петрович**, Дніпропетровський національний  
університет Міністерства освіти і науки України, м. Дніпропетровськ,  
завідувач кафедри обчислювальної механіки і міцності конструкцій;  
доктор фізико-математичних наук, професор  
**Слоньовський Роман Володимирович**, Національний університет  
“Львівська політехніка” Міністерства освіти і науки України,  
м. Львів, професор кафедри прикладної математики.

Захист відбудеться 12 лютого 2008 р. о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д  
35.052.05 у Національному університеті „Львівська політехніка” (79013, м. Львів, вул. С.Бандери,  
12).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного університету „Львівська  
політехніка” за адресою: 79013, м. Львів, вул. Професорська, 1.

Автореферат розісланий 28 грудня 2007 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
доктор технічних наук, професор

Р.А. Бунь

**ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ**

**Актуальність теми.** Вирішення проблеми виявлення, виділення і дорозвідки покладів корисних копалин у пошуковій геофізиці на сучасному етапі розвитку геофізичних досліджень вимагає теоретичного та методологічного обґрунтування даних польових температурних та електромагнітних спостережень. Водночас зниження матеріаломісткості неоднорідних елементів конструкцій, що працюють в умовах температурних чи силових навантажень, оцінка їх міцності та надійності потребує визначення температурних полів та напружено-деформованого стану і є важливою науково-прикладною проблемою у матеріалознавстві, машино- та приладобудуванні. Фізичне моделювання та експериментальні дослідження вказаних процесів вимагає великих матеріальних затрат, а неповна визначеність параметрів початкового стану та невелика кількість експериментальних установок часто ускладнюють проведення фізичного експерименту для одержання необхідних результатів. Тому розв'язання окреслених проблем вимагає побудови ефективних математичних моделей відповідних фізичних процесів, потребує розвитку відомих та розробки нових теоретичних методів розв'язування задач математичної фізики, що їм відповідають, і, як наслідок, проведення на цій базі ґрунтовних наукових досліджень.

Нестаціонарні процеси різної фізичної природи, зокрема, поширення теплового та електромагнітного полів, спричинених природними чи штучними джерелами, а також усталені процеси, зокрема, гармонічні електромагнітні коливання, лінійне та нелінійне деформування, розподіли електричного та магнітного полів, у неоднорідних середовищах, з точки зору математичного моделювання описують системами диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних з постійними або змінними коефіцієнтами.

Оскільки аналітичні розв'язки нестаціонарних та стаціонарних задач, що моделюють вказані фізичні процеси, класичними методами можна знайти тільки для однорідних середовищ та з чужорідними включеннями канонічної чи близької до неї форми, то для неоднорідних об'єктів при математичному моделюванні в останні роки все ширше використовують чисельні та чисельно-аналітичні методи, орієнтовані на застосування сучасних швидкодіючих комп'ютерів. Найбільш розповсюджені різницеві методи та методи скінченних елементів (МСЕ) є доцільними при моделюванні фізичних процесів у неперервно-неоднорідних об'єктах скінченних розмірів і дають високу точність результатів, але вимагають покриття сіткою всієї області, яку займає тіло, та потребують значних обсягів оперативної пам'яті, тривалого часу розрахунку й програм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. Використання методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та створених на його базі прямих і непрямих методів граничних елементів має низку незаперечних переваг при моделюванні процесів у кусково-однорідних областях, оскільки дозволяє точно задовольняти вихідні рівняння моделі, доступно описує необмежені і напівбезмежні об'єкти. Застосування МГІР та усіх його чисельних модифікацій потребує дискретизації тільки границі об'єкта та меж поділу середовищ, що економить обсяг

оперативної пам'яті під час роботи алгоритму і дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках. Однак при обчисленні шуканих величин поблизу границь чи меж поділу середовищ точність розрахунків різко зменшується, а знаходження похідних за координатами та нормаллю від шуканих величин вимагає попереднього аналітичного виділення особливості (головного значення). З огляду на це в багатьох випадках, на думку здобувача, доцільно застосовувати непрямий метод приграничних елементів (НМПГЕ), який можна розглядати як один з варіантів методу джерела і віднести до непрямих методів досліджень, оскільки введені для одержання розв'язку задачі невідомі не є фізичними змінними [1]. Водночас під час дослідження означених процесів у кусково-однорідних об'єктах можна суттєво оптимізувати процедуру знаходження розв'язків (зменшити час рахунку прикладних програм та обсяг оперативної пам'яті комп'ютера), якщо врахувати неперервність шуканих функцій на межі поділу середовищ і використати непрямий метод контактних елементів (НМКЕ). Розгляд згаданих процесів у локально-неоднорідних об'єктах, які найкраще відображають реальні ситуації, ще більше потребує визначення переваг та меж застосовності різних методів, що зумовлює доцільність їх поєднання для оптимізації процесу знаходження розв'язків відповідних математичних моделей.

Все перелічене і визначає актуальність теми дисертаційної роботи, присвяченої побудові математичних моделей для дослідження процесів поширення теплового та електромагнітного полів у дво- та тривимірних неоднорідних середовищах, розробці нових чисельно-аналітичних підходів, які ґрунтуються на спільному застосуванні неklasичного методу скінченних різниць, непрямих методів приграничних та контактних елементів, розвитку обчислювального експерименту та первинної інтерпретації отриманих даних.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась відповідно до планів наукових досліджень Карпатського відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України та Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Зокрема, автор була відповідальним виконавцем держбюджетних тем: „Розробка комплексу електромагнітних методів детальних досліджень структури і динаміки літосфери на прикладі Карпатського регіону”, № держреєстрації 0193U024077 (1992-1995 рр.); „Розробка комплексних технологій наземних і морських електромагнітних досліджень будови і динаміки геоструктур”, № держреєстрації 0196U008645 (1996-2000 рр.); „Фізико-математичне обґрунтування і техніко-методичне забезпечення дво- і тривимірних електромагнітних досліджень геосередовищ”, № держреєстрації 0101U000374 (2001-2005 рр.); „Розробка фізико-геологічних основ і нових технологій комплексного геофізичного прогнозування покладів вуглеводнів в Україні”, № держреєстрації 0102U002513 (2002-2006 рр.); „Дослідження можливостей застосування комплексу динамічних електрометричних і геомагнітних методів для прогнозування нафтогазоносності геологічних структур”, № держреєстрації 0104U006786

(2004-2006 рр.); „Розробити методи розв’язування нелінійних крайових задач термопружності для тіл неоднорідної структури”, № держреєстрації 0194U015278 (1994-1997 рр.); „Розробка методів розв’язування задач термопружності при імпульсних режимах навантаження термочутливих тіл неоднорідної структури”, № держреєстрації 0198U002530 (1998-2002 рр.); „Розробка математичних моделей і методів термомеханіки структурно-неоднорідних тіл”, № держреєстрації 0105U000236 (2003-2006 рр.); науково-дослідної теми „Обробка та інтерпретація результатів геомагнітних, магнітотелуричних і сейсмічних досліджень на регіональних профілях РП-5, РП-11 в Передкарпатському прогині”, № держреєстрації 0101U003465 (2001-2003 рр.), а також проекту „Математичне моделювання тривимірних задач імпульсної індуктивної електророзвідки” Державного фонду фундаментальних досліджень, грант № 06.07/208 (2004-2006 рр.).

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є вирішення важливої науково-прикладної проблеми, що полягає у побудові математичних моделей процесів поширення температурних та електромагнітних полів у кусково-однорідних і локально-неоднорідних (із залежними від координат або температури фізичними характеристиками) середовищах, у розробці чисельно-аналітичних підходів, які поєднують в собі переваги методів диференціальних та граничних інтегральних рівнянь, до визначення й дослідження цих полів.

*Для досягнення цієї мети в дисертації поставлено такі задачі:*

- здійснити математичне моделювання процесу поширення електромагнітного поля в неоднорідних об’єктах, зокрема, в земній корі;
- здійснити математичне моделювання процесу поширення нестационарного та розподілу стаціонарного теплових полів у кусково-однорідних середовищах з урахуванням залежності теплофізичних характеристик від координат чи температури;
- обґрунтувати ефективність застосування непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) для побудови і чисельно-аналітичного розв’язування систем інтегральних рівнянь, до яких зводяться розглянуті фізичні процеси, у кусково-однорідних середовищах, та показати доцільність його поєднання з неklasичним методом скінчених різниць (МСР) у областях з локальними неоднорідностями;
- на основі побудованих дискретно-континуальних моделей розглянутих процесів спланувати і провести обчислювальні експерименти, інтерпретацію температурних і геоелектромагнітних даних та параметрів напружено-деформованого стану середовищ.

*Об’єктом дослідження є нестационарні процеси поширення теплового і електромагнітного полів, гармонічні електромагнітні коливання, нелінійне деформування та розподіли потенціальних полів у кусково-однорідних об’єктах, локально-градієнтних середовищах та областях з нелінійною поведінкою матеріалів зон.*

*Предметом дослідження* є математичне моделювання вказаних вище процесів у неоднорідних середовищах за допомогою чисельно-аналітичних підходів, які поєднують в собі переваги методів диференціальних та граничних інтегральних рівнянь; обчислювальний експеримент та первинна інтерпретація температурних і геоелектромагнітних даних та параметрів напружено-деформованого стану об'єктів.

*Методи дослідження.* Для математичного моделювання вказаних процесів використані непрямі методи приграничних і контактних елементів, неklasичний метод скінченних різниць, методи занурення, адитивного розщеплення та продовження розв'язку за параметром, а також проєкційно-сіткові методи та апарат узагальнених функцій.

#### **Наукова новизна одержаних результатів:**

- для дослідження нестационарних, стаціонарних та усталених процесів у кусково-однорідних об'єктах довільної форми, локально-градієнтних середовищах та областях з нелінійною поведінкою матеріалів зон побудовано математичні моделі, що містять системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, умови контакту на межах поділу середовищ, граничні та початкові умови;
- вперше розроблено чисельно-аналітичні підходи, які базуються на спільному використанні НМПГЕ та неklasичного МСР, для математичного моделювання:
  - процесу поширення квазістаціонарного та усталених гармонічних коливань електромагнітного поля, спричиненого штучними джерелами струму, що дає можливість визначати його компоненти в неоднорідній земній корі, не вводячи потенціалів електричного чи магнітного типів;
  - стаціонарного та нестационарного теплових полів, що дає можливість визначати температуру і тепловий потік у кусково-однорідних середовищах з локальними неоднорідностями з урахуванням залежності теплофізичних характеристик від координат чи температури;
  - процесу нелінійного деформування, що дає можливість визначати параметри напружено-деформованого стану середовищ з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик від координат та тензора деформацій;
- вперше обґрунтовано ефективність використання НМПГЕ для побудови і чисельно-аналітичного розв'язування систем граничних інтегральних рівнянь, до яких зводяться розглянуті нестационарні та усталені фізичні процеси, у кусково-однорідних областях довільної форми, що дозволило порівняно з непрямим методом граничних елементів (НМГЕ) послабити сингулярність граничних інтегральних рівнянь, спростити побудову дискретно-континуальних моделей та істотно підвищити точність під час обчислення шуканих величин поблизу границь чи меж поділу середовищ;

- вперше для математичного моделювання стаціонарних, нестаціонарних та усталених фізичних процесів у кусково-однорідних областях довільної форми за умов ідеального контакту між складовими розроблено чисельно-аналітичні підходи, які ґрунтуються на поєднанні непрямих методів приграничних та контактних елементів, що дозволило вдвічі зменшити кількість граничних інтегральних рівнянь на межі поділу середовищ;
- здійснено комплексні дослідження дво- та тривимірних прямих задач геоелектромагнетизму, теплопровідності та нелінійної теорії пружності, спрямовані на вирішення проблем пошуку родовищ корисних копалин у земній корі, визначення місцезнаходження та розмірів чужорідних включень, порожнин і дефектів.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені в дисертації підходи до побудови дискретно-континуальних моделей дозволяють моделювати широкий клас фізичних процесів та станів у неоднорідних середовищах для задач геофізики, теплофізики, механіки, екології, матеріалознавства, дефектоскопії та мікромеханіки зернистих композитів. Розв'язки, отримані за допомогою цих підходів, можуть бути основою для мікроаналізу композитних структур із залученням теорій гомогенізації. Побудовані нові математичні моделі фізичних процесів та одержані на їх базі розв'язки прямих задач можуть використовуватись для створення методів розв'язування обернених задач у цих прикладних галузях науки.

Розроблену для моделювання нестаціонарних процесів методологію можна застосувати для розв'язування інших початково-крайових задач, що містять диференціальні оператори в частинних похідних з відомим фундаментальним розв'язком для однорідного простору, а також за умов неідеального контакту на межі поділу середовищ. Запропоновані в роботі підходи, методи досліджень та пакети прикладних програм можуть використовуватись у навчальному процесі під час викладу спеціальних курсів.

Для математичного моделювання стаціонарних та нестаціонарних процесів розроблено комплекс прикладних програм, який використовують під час проведення наукових досліджень в рамках держбюджетних та науково-дослідних тем відділом геоелектромагнітних методів Карпатського відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України та відділом термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. В рамках госпдоговірної науково-дослідної теми із Західно-Українською геофізичною розвідувальною експедицією проведено інтерпретацію польових даних та передано її результати для використання при вивченні прогнозних геометричних та фізичних параметрів нафтогазових об'єктів; з Прикарпатським державним підприємством „Спецгеологорозвідка” проведена первинна інтерпретація даних з метою використання її результатів для діагностування стану приповерхневих геосередовищ, формування прогнозних параметрів для попередження екологічно небезпечних явищ, що підтверджено відповідними актами про використання результатів роботи.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У роботах, написаних у співавторстві, здобувачу належить розробка і реалізація підходів, що ґрунтуються на застосуванні методів приграничних та контактних елементів, а також неklasичних скінченних різниць, до моделювання фізичних процесів та станів у неоднорідних середовищах. Зокрема, у монографії [1] та статтях [29, 33] автору належить розвиток непрямого методу приграничних елементів щодо розв'язування нестационарної задачі теплопровідності у однорідних й кусково-однорідних областях та його поєднання з неklasичним методом скінченних різниць у локально-неоднорідних областях, а також з непрямым методом контактних елементів для стационарної задачі теорії потенціалу у кусково-однорідних областях; у статтях [3, 4, 11] – розробка підходу до знаходження компонент електромагнітного поля для кусково-однорідного півпростору у квазістационарному наближенні; у працях [6, 47] – методологія математичного моделювання усталених коливань електромагнітного поля у кусково-однорідному півпросторі; у роботах [5, 18, 21, 43] – участь у розробці підходу до знаходження нестационарного температурного поля у дво- та тривимірних однорідних та кусково-однорідних середовищах за допомогою НМПГЕ для двох покровкових часових схем: схеми послідовності початкових умов та схеми єдиної початкової умови; у працях [14, 45, 49] – розробка методів знаходження компонент електричного та магнітного поля в локально-неоднорідному півпросторі та просторі; у статтях [7, 8, 20] – обчислювальний експеримент під час розв'язування задач про напружено-деформований стан однорідних та неоднорідних тіл з врахуванням фізичної нелінійності та неідеального контакту; у статтях [16, 22, 23, 31] – поширення НМПГЕ на розв'язування задач пружності та термопружності у кусково-однорідних та локально-неоднорідних областях, участь у постановці задач та розробці схеми побудови їх розв'язку; у роботах [26, 59, 60] – математичне моделювання нестационарних електромагнітних полів у кусково-однорідних середовищах; у статті [19] – розробка й апробація поєднання контактних елементів з неklasичними скінченними різницями у задачах геоелектророзвідки постійним струмом для неоднорідних середовищ; у статті [39] – математичне моделювання методу профілювання під час знаходження електричного потенціалу в електропровідній кусково-однорідній півплощині; у роботах [35, 50] – розробка підходу до розв'язування нестационарної та стационарної задач теплопровідності для середовищ із залежними від температури характеристиками; у статтях [41, 42] – участь у постановці та розробці схеми побудови розв'язку нестационарних задач теплопровідності з нелінійною граничною умовою третього роду; у роботах [51, 52, 54, 58] – знаходження електричного потенціалу з використанням непрямих методів граничних та контактних елементів у задачах геоелектророзвідки постійним струмом для кусково-однорідних об'єктів; у працях [48, 55, 56] – спільне використання приграничних і контактних елементів у задачах геоелектророзвідки постійним струмом.



**Апробація результатів дисертації.** Основні концепції, ідеї, положення і результати досліджень доповідались і обговорювались на наукових семінарах, конференціях, нарадах, симпозиумах: 4-й Міжнародній конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995); Міжнародній конференції „Крайові задачі термомеханіки” (Львів, 1996); Міжнародній конференції „Сучасні проблеми механіки і математики” (Львів, 1998); Науково-практичній конференції “Результати і перспективи геофізичних досліджень у західному регіоні України” (Львів, 1998); Міжнародних конференціях „Питання теорії і практики геологічної інтерпретації гравітаційних, магнітних і електричних полів” (Воронеж, 1996, Ухта, 1998); XXI та XXII Генеральних Асамблеях Європейського Геофізичного Товариства (Гаага, 1996, Відень, 1997); XIV нараді з електромагнітної індукції в Землі (Сіная, 1998); IV Міжнародному семінарі-нараді „Прямі і обернені задачі теорії електромагнітних і акустичних хвиль” (Львів, 1999); Міжнародному симпозиумі „Питання оптимізації обчислень” (Київ, 1999); VI Міжнародній конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2003); 6-й Міжнародній науково-практичній конференції „Нафта і газ України – 2000” (Івано-Франківськ, 2000); VI Міжнародному науково-технічному симпозиумі „Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища. GPS і GIS – технології” (Алушта, 2001); Всеукраїнських наукових конференціях “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2000, 2002, 2003, 2004); наукових конференціях „Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища” (Київ, 2003, 2006); 10-й та 16-й наукових сесіях Наукового товариства ім. Шевченка (Львів, 1999, 2005); VI Міжнародному конгресі з температурних напружень (Відень, 2005); науковій конференції „Нові геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища” (Львів, 2006).

У повному обсязі робота доповідалась на розширених наукових семінарах Карпатського відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, науковому семінарі відділу математичних методів і програмних засобів прикладної інформатики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, міжвузівському науковому семінарі „Проблеми механіки деформівних тіл і конструкцій” при Придніпровському науковому центрі НАН України, науковому семінарі Західно-Української геофізичної розвідувальної експедиції.

**Публікації.** Основні результати дисертації викладено в 60 наукових працях, зокрема, в одній монографії, у 22 статтях в наукових журналах і збірниках наукових праць, які входять до Переліку фахових видань ВАК України в галузі технічних наук; 13 статтях в наукових журналах, які входять до Переліку фахових видань ВАК України в інших галузях, у 6 наукових статтях в інших виданнях, у 8 матеріалах міжнародних семінарів, конференцій і конгресів, у 10 тезах доповідей національних і міжнародних конференцій, симпозиумів та нарад.

**Структура та об'єм роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, основної частини з восьми розділів, висновків, списку використаних джерел з 323 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 347 сторінок, обсяг основного тексту 314 сторінок, ілюстрованого 48 рисунками та трьома таблицями.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У **вступі** подано загальну характеристику роботи: розкрито сутність і стан вивчення наукової проблеми, обґрунтовано доцільність напрямку досліджень та актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, основні методи і задачі досліджень, відзначено наукову новизну отриманих результатів, їх зв'язок із науковими програмами, планами та темами, наведено дані щодо їх практичної цінності й апробації.

**Перший розділ** присвячено огляду літературних джерел та обґрунтуванню вибору напрямків досліджень. Зроблено аналітичний огляд основних наукових результатів за обраною тематикою, підкреслено зв'язок роботи з іншими дослідженнями, визначено проблеми, які необхідно розв'язувати. Відображено основний зміст роботи і описано послідовність викладу матеріалу дисертації.

Зроблено огляд математичних методів, які використовують при моделюванні процесів та станів різної природи у неоднорідних середовищах. Створенню фундаментальної теоретичної бази і методів розв'язування нестационарних задач теплопровідності, геоелектромагнетизму та нелінійної теорії пружності в неоднорідних середовищах присвячені монографії Я.М. Григоренка, О.М. Гузя й Ю.М. Немиша, Г. Карслоу й Д. Єгера, В.Д. Купрадзе, О.В. Ликова, В.О. Ломакіна, Г.І. Марчука й В.І. Агошкова, О.Г. Міхліна, М.І. Мусхелішвілі, В. Новацького, Я.С. Підстригача, В.О. Ломакіна й Ю.М. Коляна, Г.Я. Попова, В.Л. Рвачова і М.С. Синєкопа, А.М. Тихонова, С.М. Шейнмана та інших. У роботах цих та інших авторів, зокрема, Р. Баттерфілда, П. Бенерджі, К. Бреббії, В.М.Булавацького, Я.Й. Бурака, О.Р. Гачкевича, О.Я. Григоренка, Є.Г.Грицька, В.Т. Грінченка, А.П. Дзюби, В.С. Дейнеки, В.І. Дмитрієва, М.С. Жданова, Б.Я. Кантора, В.Г. Карнаухова, О.О. Кауфмана, Г.С. Кіта, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, М.П. Ленюка, С.І. Ляшка, В.Л. Макарова, Б.А. Мандзія, М.В. Марчука, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, В.С. Могилатова, З.Т. Назарчука, В.А. Осадчука, В.Г. Попова, В.С. Поповича, Б.В. Процюка, Я.Г. Савули, Я.С. Сапужака, І.В. Сергієнка, В.В. Скопєцького, Р.В. Слоньовського, Г.Т. Сулима, Л.А. Табаровського, А.Ф. Улітка, Д.В. Федасюка, М.В. Хая, В.Ф. Чекуріна, В.П. Шевченка, Г.А. Шинкаренка, В.М. Шумана для знаходження фізичних полів у неоднорідних тілах використано різні аналітичні та чисельні методи: відокремлення змінних, інтегральних перетворень, збурення форми границі, спряження, застосування узагальнених функцій, проєкційно-сіткові, скінченних різниць,  $R$ -функцій, граничних інтегральних рівнянь, граничних і скінченних елементів, а також їх поєднання.

В останні десятиліття зростання потужності і швидкодії комп'ютерів дозволяє дослідникам чисельно моделювати щораз більше наближені до реальних поля і стани різної фізичної природи у дво- і тривимірних середовищах на відміну від раніше розглянутих спрощених, переважно одновимірних, моделей середовищ та процесів, що в них відбуваються. Під час побудови математичних моделей у геофізиці, механіці суцільного середовища, теплофізиці, електродинаміці, геоелектриці реальні середовища найчастіше моделюють кусково-однорідними, тобто складеними з однорідних ізотропних частин, включень (зон) довільної форми з різними, але постійними фізичними характеристиками в межах складових. Рідше розглядають локально-неоднорідні об'єкти, фізичні характеристики яких залежать від координат (геометрична неоднорідність) або (та) шуканої функції (фізична неоднорідність) у деяких локальних областях, та кусково-однорідні з локальними неоднорідностями, хоч саме такі моделі адекватніше відповідають реальним ситуаціям у різних прикладних галузях науки й техніки.

Розвиток чисельно-аналітичних методів моделювання фізичних процесів різної природи відбувається, в основному, у двох напрямках: в рамках методу інтегральних рівнянь та підходу, заснованого на безпосередньому розв'язуванні диференціальних рівнянь. Гібридні схеми моделювання з використанням переваг обох попередніх напрямів застосовують ще не так широко. Проведений огляд і аналіз літератури показав, що на даний час недостатньо розглянуті математичні моделі, які враховують геометричні чи фізичні неоднорідності, а запропоновані для математичного моделювання підходи не позбавлені низки недоліків. Шляхом синтезу математичних методів, зокрема, граничних інтегральних рівнянь, проекційно-сіткових, занурення, граничних і скінченних елементів, і виникли запропоновані чисельно-аналітичні підходи, що ґрунтуються на поєднанні НМПГЕ, неklasичного МСР та НКМЕ, і дозволяють моделювати нестационарні й усталені процеси, розподіли потенціальних полів у неоднорідних областях складної форми при розв'язуванні прямих задач у різних галузях науки й техніки. Вдала побудова математичних моделей і вибір високо-точних методів розв'язування прямих задач служать основним фактором інформативності обернених задач, оскільки дозволяють мінімізувати вартість прикладних розробок та підвищити ступінь достовірності визначення параметрів середовища. Модульний принцип побудови пакетів прикладних програм для реалізації вказаних підходів сприяє підвищенню універсальності й гнучкості розглянутих математичних моделей щодо розв'язування багатьох складних задач з різних галузей науки й техніки, дозволяє легко розширювати коло наукових досліджень.

У **другому** розділі, використовуючи принцип „від простішого до складнішого” щодо досліджуваних об'єктів, розглянуто процеси поширення теплового та електромагнітного полів в однорідних областях. Для математичного моделювання вперше розроблено НМПГЕ, розглянуто його теоретичні й обчислювальні аспекти, порівняно чисельні результати, одержані за допомогою НМПГЕ, з аналітичними розв'язками та отриманими іншими чисельними методами, зокрема,

непрямим методом граничних елементів (НМГЕ) як найближчим за ідейним спрямуванням і ширше відомим дослідникам.

Розглянуто однорідне ізотропне тіло довільної форми, яке віднесено до декартової системи координат і займає область. Для знаходження фізичної скалярної величини (наприклад, температури) або компонент векторної величини (зокрема, векторів напруженості електромагнітного поля) побудовано математичну модель [1, 18, 33]

Доведено справедливість твердження.

**Теорема 1.** Нехай задано зовнішню приграничну до область та область розширених початкових умов з введеними в них відповідно невідомими фіктивними джерелами та відомими неперервними функціями, які співпадають в з , рівні нулю зовні , а в області вибираються у зручному для інтегрування вигляді. Тоді інтегральні зображення розв'язків рівнянь (1) з урахуванням початкового розподілу (3) мають вигляд:

Для знаходження невідомих одержано, враховуючи граничні умови (2), граничні інтегральні рівняння (ГІР):

Оскільки знайти розв'язки рівнянь (7) в явному вигляді у прикладних задачах переважно неможливо, здійснено їх **просторово-часову дискретизацію** за допомогою наступних кроків.

1. У зовнішній приграничній області виділено  $(n+1)$  підобласті, які взаємно не перетинаються, причому одна чи навіть дві з них можуть бути порожніми множинами. Далі розбито на плоскі криволінійні чотирикутники (при  $n=2$ ) або шестигранники з неплоскими гранями (при  $n=3$ ) – приграничні елементи (ПГЕ), причому , а перетин і при не обов'язково повинен бути порожньою множиною. На елементах уведено сімейства точок, на – криволінійних відрізків, а на при  $n=3$  – поверхонь. У кожному ПГЕ розмірності  $j$  (ПГЕ <sub>$j$</sub> ) введено невідоме фіктивне джерело інтенсивності.
2. Для зручності опису залежності від часу часовий промінь  $\mathbf{T}$  розбито на інтервали  $\mathbf{T}_p = ]\tau_{p-1}, \tau_p]$  ( $p=1,2,\dots,P, \tau_0=0$ ) і в межах кожного  $\mathbf{T}_p$  для спрощення алгоритму невідомі інтенсивності фіктивних джерел апроксимовано за часом поліномом з невідомими коефіцієнтами.
3. Для задоволення граничних умов використано метод колокації, області та дискретизовано внутрішніми комірками.

Дискретно-континуальну модель побудовано для двох покрокових часових схем: схеми послідовності початкових умов (СППУ) та схеми єдиної початкової умови (СЄПУ). У першій схемі кожний крок за часом розглянуто як нову задачу, тобто уведено локальний час і обчислені в кінці кожного часового інтервалу значення у внутрішніх точках використано як початкові для наступного кроку. У другій схемі процес інтегрування за часом завжди відбувається з одного і того ж реального моменту часу.

Інтегральні рівняння (7) після просторово-часової дискретизації для  $P$ -го кроку обох схем записано у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Її розв'язки використано у формулах (4) для обчислення шуканих функцій та похідних від них величин як у будь-якій внутрішній точці, так і у точках границі в момент часу.

Проведено часткове аналітичне інтегрування за приграничними елементами розмірності  $n$  для випадку апроксимації функцій поліномами за часом. Здійснено аналітичне інтегрування за часовою змінною, а також за однією з просторових змінних (полярним або сферичним радіусом). Це спрощує розробку програмного забезпечення дискретних моделей та підвищує точність одержаних розв'язків, оскільки чисельне інтегрування здійснено за однією або двома просторовими координатами, що використовуються для опису елемента границі, вже несингулярної, як правило, функції.

Похибки, які виникають при застосуванні НМПГЕ до розв'язування практичних задач, спричинені апроксимаційними й дискретизаційними операціями, а також чисельним інтегруванням. З метою порівняння точності чисельних результатів, одержаних НМПГЕ, з відомим аналітичним розв'язком та розв'язком, одержаним за допомогою НМГЕ, досліджено розв'язки нестационарних задач теплопровідності з граничними умовами першого роду для двовимірної пластини квадратної форми [21] та для паралелепіпеда з одиничним коефіцієнтом температуропровідності матеріалу. Зокрема, для паралелепіпеда розглянуто нульові початкові умови та граничні умови: .

Як видно з рис. 1, у внутрішніх і граничних точках паралелепіпеда точність збігу чисельних результатів з аналітичним розв'язком є вищою у НМПГЕ порівняно з НМГЕ, причому з плином часу вона покращується.

Рис. 1. Порівняння у внутрішніх (а, б) та граничних (в) точках паралелепіпеда температури, обчисленої за допомогою НМПГЕ та НМГЕ, з аналітичним розв'язком

Далі на двох тестових прикладах оцінено похибки, які виникають при застосуванні різних типів ПГЕ. Область вибирали у вигляді круга радіуса 1м і квадрата зі стороною 2м. У першому прикладі на задавали температуру та вибирали коефіцієнт температуропровідності, у другому – при нульових початкових умовах та за відсутності джерел тепла. Границю розбивали на вісім граничних елементів однакової довжини. Досліджено залежність відносних похибок температури від висоти ПГЕ, їх типу та форми. Розглянуто три випадки дискретизації області: з недостатчею, повну при), з перекриттям. Для виявлення особливостей, внесених кожним типом ПГЕ, задачу спочатку почергово розв'язували для окремих типів ПГЕ<sub>*j*</sub>, коли дві підмножини були порожніми. Кількість дуг та точок на усіх елементах вибирали однаковою. Інтенсивності введених фіктивних джерел апроксимували невідомими постійними. Розв'язки першого і другого прикладів, одержані за допомогою ССПУ для окремих типів ПГЕ та їх поєднання порівняно з умовами, заданими на гра-

ниці круга і квадрата. Враховуючи той факт, що найвища точність розв'язків для круга досягалась за повної дискретизації області, а для квадрата – за дискретизації прямокутниками, на рис. 2 зображено чисельні результати для цього випадку.

Рис. 2. Залежність відносних похибок на частині границі круга (а) та квадрата (б) для різних типів ПГЕ

Як видно з рис. 2, точність обчислення температури на границях круга і квадрату є найвищою під час використання ПГЕ<sub>2</sub> (криві без символів) та сімейств дуг, покращується при збільшенні кількості дуг і точок та спільному застосуванні різних типів ПГЕ. Тут – кут між віссю  $Ox_1$  та точкою спостереження,  $l$  – відстань від точки  $(1.0;0)$  до точки спостереження, ПГЕ<sub>2</sub> у першому та другому прикладах вибирали висотою  $h_1=1.5\text{м}$ ,  $h_2=1.0\text{м}$  відповідно, ПГЕ<sub>1</sub> почергово розміщували на відстанях  $H=0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$  (м) та  $H=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  (м) від границі, ПГЕ<sub>0</sub> рівномірно вибирали на цих кривих. Внаслідок симетрії задач приведено залежність похибок тільки на четвертій частині границі. Для внутрішніх точок результати, одержані за допомогою НМПГЕ, співпадали з аналітичними розв'язками, наведеними в роботах Карслоу й Сгера, та з одержаними НМГЕ з точністю до трьох значущих цифр.

Для тіл, що займають деяку область в чи, схема розв'язування НМПГЕ була дуже подібною, що дозволило використати модульний принцип побудови програмного забезпечення та уніфікувати розробку його частини. Відмінності в основному проявились у розмірності та формі приграничних елементів й у фундаментальних розв'язках.

Проведені чисельні дослідження показали, що НМПГЕ у поєднанні з покрововими часовими схемами (СППУ та СЕПУ) забезпечує вищу точність розрахунків температурного поля порівняно з НМГЕ при використанні однакової кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих інтенсивностей фіктивних джерел. Це обґрунтовується тим, що пригранична область та розширена область початкової умови за рахунок додаткових параметрів (їх товщин) згладжують вплив уведених у цих областях джерел та функцій.

Порівняння теоретичних та обчислювальних аспектів використання різних типів ПГЕ при моделюванні нестационарних процесів теплопровідності, здійснене в цьому розділі, дозволило зробити такі висновки. Під час застосування ПГЕ<sub>2</sub> і ПГЕ<sub>1</sub> всі інтеграли розглядають у звичайному сенсі, а це дозволяє у разі потреби обмежитись тільки чисельним інтегруванням. При цьому зберігається діагональна перевага елементів матриці СЛАР, яка забезпечує добру її обумовленість. ПГЕ<sub>1</sub> у випадку однієї кривої можна розглядати як аналог деякого гладкого контуру, який охоплює область  $\Omega$ , не співпадає з її граничною поверхнею і був запропонований у методі функціональних рівнянь Купрадзе, однак питання про способи вибору такого контуру до цього часу повністю не досліджені. Зрозуміло, що при чисельній реалізації такого алгоритму значна віддаленість контуру від границі

приводить до поганої обумовленості матриці СЛАР внаслідок відносно малої величини діагональних елементів або до одержання лінійно-залежних систем рівнянь. Використання сімейств кривих дозволяє усунути вказану проблему, оскільки при збільшенні кількості кривих дискримінант матриці СЛАР зростає. ПГЕ<sub>0</sub> значно спрощують алгоритм розв'язування задачі, оскільки дозволяють уникнути інтегрування по ПГЕ, замінивши його сумуванням добутків фундаментальних розв'язків на значення невідомої функції. Їх можна рекомендувати при знаходженні початкових наближень як експрес-метод розв'язування обернених задачах математичної фізики, коли більшу роль відіграє оптимізація часу, ніж точності.

У **третьому** розділі, знову використовуючи принцип „від простішого до складнішого” щодо досліджуваних об'єктів, здійснено за допомогою НМПГЕ математичне моделювання знаходження розподілу потенціальних полів, параметрів напружено-деформованого стану та компонент векторів напруженості електромагнітного поля для випадку гармонічних коливань в однорідних областях.

Розглянуто однорідне ізотропне тіло довільної форми, яке займає у декартовій системі координат область  $\Omega$ . Для знаходження фізичних скалярних величин (наприклад, температури чи потенціалу електричного поля) або компонент векторних величин (зокрема, векторів переміщень чи напруженості електромагнітного поля для випадку гармонічних коливань) побудовано математичні моделі [15, 20, 30, 31, 36]:

Доведено справедливість твердження.

**Теорема 2.** Нехай задано зовнішню приграничну до  $\Omega$  область  $\Omega^*$  із введеними в ній невідомими фіктивними джерелами або масовими силами. Тоді інтегральні зображення розв'язків рівнянь з (8), (9) та (10) мають вигляд:

Задовольняючи граничні умови з (8), (9) та (11), одержано ГІР:

які при  $n=2$  доповнено умовами у нескінченно віддалених точках. Після дискретизації приграничної області на приграничні елементи й апроксимації невідомих інтенсивностей джерел в них постійними рівняння (15)–(17) записано у вигляді СЛАР. Після їх розв'язання і знайдення цих невідомі використано формули (12) та (13) для обчислення потенціалу, компонент векторів переміщень та напруженостей електромагнітного поля (ЕМП) та похідних від них величин у будь-яких точках спостереження.

Програмну реалізацію запропонованого підходу здійснено для стаціонарної задачі теплопровідності та теорії пружності. Область  $\Omega$  знову вибирали у вигляді круга радіуса 1 м та квадрата зі стороною 2 м. В обох прикладах на  $\Omega^*$  задавали температуру при за відсутності джерел тепла або компоненти вектора переміщень за відсутності масових сил у допущенні, що для області виконувалися умови плоскої деформації, матеріал (сталь конструкційна) мав такі пружні характеристики:  $E = 210 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$ . Показано, що точність обчислення потенціалу та переміщень на границях круга і квадрата є найвищою під час використання ПГЕ<sub>2</sub> та сімейств дуг, покращується при збільшенні

кількості дуг і точок та спільному застосуванні різних типів ПГЕ (зокрема, чотирикутників і сімейств дуг) [15, 36], водночас вона є набагато вищою при використанні НМПГЕ, ніж НМГЕ [20].

У **четвертому** розділі за допомогою НМПГЕ здійснено математичне моделювання процесів поширення теплового та електромагнітного полів у кусково-однорідних середовищах за умов ідеального контакту на межах поділу складових.

Для знаходження фізичної скалярної величини (температури) або векторної величини (компонент електромагнітного поля) побудовано математичну модель [1, 5, 32]:

Розглянуто множину  $\Omega$ , складену з  $M$  площин або  $M$  просторів, яка володіє такими властивостями: [1]. Після введення приграничних областей  $G_m$  з фіктивними джерелами та розширення області визначення функцій на весь  $\Omega$  на основі теореми 1 записано інтегральні зображення розв'язків рівнянь (18), аналогічні (4) з врахуванням (5), (6) та індексу приналежності зоні  $m$ .

Для задоволення граничних умов з (19) та умов контакту (20) одержано ГР:

Побудовано дискретно-континуальні моделі для двох покрокових часових схем: СППУ та СЕПУ. Області  $G_m$  з метою спрощення викладу матеріалу і без втрати загальності дискретизовано на ПГЕ розмірності  $n$ . На кожному часовому інтервалі у ПГЕ невідому функцію апроксимовано по часу поліномом степені  $T$  з невідомими постійними, які знайдено зі СЛАР, отриманих після просторово-часової дискретизації на  $P$ -му кроці для обох часових схем у колокаційному сенсі з (21), (22). Визначено температуру, тепловий потік та компоненти ЕМП на  $P$ -му кроці як у внутрішніх точках кожної  $G_m$ , так і на межах поділу середовищ, оскільки після розв'язання СЛАР всі області розглядають цілком незалежно.

Далі за допомогою НМПГЕ здійснено математичне моделювання усталених коливань теплового та електромагнітного полів у кусково-однорідному середовищі. У допущенні, що температура чи компоненти електромагнітного поля гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою  $\omega$  для знаходження комплексних амплітуд побудовано математичну модель [6, 47]:

Після введення множини просторів  $\Omega$  та приграничних областей  $G_m$  з невідомими функціями на основі теореми 2 записано інтегральні зображення розв'язків системи рівнянь Гельмгольца (23), аналогічні (13) з врахуванням (14) та індексу приналежності зоні  $m$ .

Для задоволення умов на границі та межах поділу середовищ одержано ГР:

Здійснено просторову дискретизацію та апроксимацію в межах кожного приграничного елемента невідомих інтенсивностей джерел комплексними постійними, які знайдено зі СЛАР, отриманих задоволенням у колокаційному сенсі рівнянь (25), (26).

Змодельовано процеси поширення теплового [5, 43] та електромагнітного поля [3, 4, 11] у кусково-однорідному півпросторі при нульових початкових й граничних умовах. З рівнянь Максвелла одержано у квазістаціонарному наближенні рівняння для компонент вектора напруже-



ності електричного поля, побудовано явний часовий розв'язок задачі знаходження компонент векторів напруженостей ЕМП без застосування спектрального аналізу і векторних потенціалів електричного чи магнітного типів.

Під час проведення чисельних досліджень область вибирали у формі паралелепіпеда з розмірами , який знаходився на глибині від границі півпростору. Збурення теплового поля викликалось внутрішнім джерелом у формі квадратної пластини зі стороною , розміщеним на глибині . Залежність температури від часу в джерелі описували дельта-функцією Дірака. Джерелом збурення ЕМП був контур (квадратна рамка зі стороною , розміщена на глибині ), в якому в момент часу включали постійний струм. Розрахунки проведено з оптимальною з точки зору необхідної точності та об'єму обчислювальних операцій кількістю елементів дискретизації, оскільки подвоєння їхньої кількості практично не впливало на точність, але суттєво збільшувало час обчислень. ПГЕ вибирали висотою 0.5м. Лінійні розміри, враховуючи принцип подібності, зменшили порівняно з реальними в 100 разів.

Порівняно чисельні результати, отримані за допомогою НМПГЕ та НМГЕ (рис. 3). Порівняльний аналіз графіків засвідчує, що точність обчислень теплового потоку (рис. 3а) та компонент ЕМП (рис. 3б) за допомогою НМПГЕ є вищою, ніж при одержанні розв'язків НМГЕ.

Рис. 3. Порівняння результатів, отриманих за допомогою НМПГЕ (криві з символами ) та НМГЕ (криві без символів) з точним розв'язком (криві з символами ).

Досліджено закономірності зміни характеристик теплового та електромагнітного полів від геометрії та фізичних властивостей включень: їх тепло- або електропровідності, відстані від границі півпростору, довжини – з метою формулювання практичних рекомендацій при розпізнаванні чужорідних зон (рис. 4, 5, криві з написом 1 відповідають однорідному півпростору).

Рис.4. Вплив провідності включення на значення теплового потоку на частині границі півпростору

Для визначення місця залягання включень, оцінки їх електропровідності та об'єму, еквівалентного запасам сировини, побудовано на базі різних компонент ЕМП допоміжні криві, зокрема, позірні електропровідності, одержані за профілями чи як функції від часу, та розглянуто елементи тривимірної інтерпретації співвісних, рознесених і площівних зондувань. Проведено дослідження для горизонтально і вертикально розміщених покладів, змодельованих паралелепіпедами, при різних провідностях включень та положеннях живильної та приймальної рамки [4, 11], які дозволили оцінити співвідношення між коефіцієнтами електропровідності середовища і включень, глибину залягання та горизонтальні розміри включень.

Рис. 5. Залежність величин від часу при зміні електропровідності включення (а) та глибині його залягання (б)

Одержані результати свідчать про підвищену роздільну здатність індуктивних імпульсних електророзвідувальних методів у порівнянні з методами постійного струму, зокрема, з електропрофілюванням за допомогою серединних градієнтів та других різниць потенціалу [19], оскільки навіть за достатньо малої відстані між покладами останні фіксуються як різні об'єкти, а не як один більших розмірів. Зокрема, на рис. 6 зображено залежність позірної електропровідності для двох провідних та високоомних включень, розміщених на глибині  $h$ , від відстані  $L$  (м) між ними; рамка рівновіддалена від обох включень.

Рис. 6. Залежність трансформацій ЕМП над провідними та високоомними включеннями від відстані між ними

Проаналізовано поведінку компонент ЕМП при частотному зондуванні [6] у кусково-однорідному півпросторі з нульовим розподілом компонент вектора напруженості ЕП на його границі. На рис. 7 зображено залежність дійсних значень вертикальної компоненти магнітного поля, одержаних в центрі рамки, від частоти  $\omega$  для параметрів, які відповідають нафтовому, газовому та провідному включенням для повної (товстіші криві), квазістаціонарної моделей (тонші криві) та однорідного півпростору (криві без символів). Чисельні результати показали, що при використанні частот до 100 кГц можна нехтувати струмами зміщення, тобто розглядати квазістаціонарну модель усталених коливань, однак в області вищих частот треба обов'язково їх враховувати, щоб не отримати занижені дані. Отримані амплітудні й фазові криві позірного опору служать для оцінки геометричних та фізичних параметрів включень.

Рис. 7. Вплив параметрів включення на вертикальну компоненту магнітного поля при частотному зондуванні

Запропонований для кусково-однорідних об'єктів підхід дозволяє розраховувати нестационарне теплове поле та в квазістаціонарному наближенні всі компоненти ЕМП в часовій області, розміщувати точкові та скінченних розмірів джерела різних типів і точки спостереження в будь-якому місці об'єкта; розглядати довільні, в т.ч. й імпульсні, режими теплового та електричного збурення; на базі розв'язків прямих задач моделювати ефективні трансформації для оперативної обробки великих масивів площіних даних під час тривимірної інтерпретації [26, 60, 59].

Результати проведеного математичного моделювання та чисельних експериментів свідчать про те, що інформацію про теплове та електромагнітне поля, одержану на границі і всередині тіла, можна використовувати для виявлення в ньому локальних чужорідних включень. За допомогою запропонованого підходу можна достовірно визначати нестационарні теплові потоки і температури, компоненти ЕМП. Одержані розв'язки прямих тривимірних задач можуть служити основою для розробки підходів до розв'язування обернених задач, тобто для знаходження фізичних і геометричних параметрів включень та джерел тепла. Чисельні експерименти також підтверджують

доцільність застосування індуктивних імпульсних електророзвідувальних методів становлення поля та частотного зондування для виявлення високопровідних включень типу рудних родовищ та високоомних включень типу нафтових і газових покладів. Загальними сприятливими умовами для виявлення і дослідження чужорідних об'єктів з провідністю, вищою чи нижчою, ніж геосередовище, треба вважати співвимірну з горизонтальними розмірами (чи меншу) глибину їх залягання.

**П'ятий** розділ присвячено математичному моделюванню, яке ґрунтується на поєднанні НМПГЕ та НМКЕ, задач геоелектророзвідки постійним та змінним струмами у кусково-однорідних областях. Розглянуто кусково-однорідне тіло довільної форми, яке містить  $M-1$  включення за умов ідеального контакту між зонами та граничних умов першого, другого та третього роду. Характеристики середовища залежать від координат за формулою:

При моделюванні задач геоелектророзвідки постійним струмом записано рівняння Пуассона для середовища з одиничною провідністю та з зосередженими на джерелах, інтенсивність яких визначається невідомими [29]:

Оскільки в правій частині (27) присутні невідомі похідні за нормаллю від розв'язку, введено невідому функцію, яка описує розподіл фіктивних джерел на межі поділу середовищ [29]. Згідно НМПГЕ у приграничній області уведено невідому функцію, яка описує розподіл фіктивних джерел в ній. Це дозволило записати з використанням теореми 2 інтегральне зображення розв'язку рівнянь (27):

Для задоволення граничних умов з (8) та умови збігу на  $\Gamma$  з одержано ГІР:

Інтегральні рівняння (29), (30) після дискретизації на приграничні та контактні елементи й апроксимації в них невідомих інтенсивностей джерел константами записано у вигляді СЛАР. Розв'язавши її і знайшовши ці невідомі, використано формули (28) для обчислення шуканого потенціалу електричного поля та густини струму у будь-яких точках спостереження.

Далі розглянуто можливості поєднання НМПГЕ та НМКЕ при моделюванні нестационарних процесів поширення теплового та електромагнітного полів у кусково-однорідних областях за умов . Показано, що математична модель складається з рівнянь [2, 12] (31), граничних та початкових умов (2), (3); тут – функція, яка відомим чином залежить від шуканого розв'язку, – компоненти зовнішньої однозначно визначеної нормалі до на межі з .

Використання НМПГЕ та НМКЕ із введеними відповідно в області та на межі поділу джерелами невідомих інтенсивностей дозволило записати на основі теореми 1 інтегральне зображення розв'язку рівнянь (31) [2, 12, 27, 57].

Для задоволення граничних умов (2) та умови збігу на з одержано ГІР:

Інтегральні рівняння (33), (34) після дискретизації на приграничні та контактні елементи й апроксимації невідомих інтенсивностей джерел поліномами за часом записано у вигляді СЛАР для двох покрокових часових схем: СППУ та ССПУ. Розв'язавши їх і знайшовши ці невідомі,

використано формули (32) для обчислення температури, теплового потоку чи компонент ЕМП у будь-яких точках об'єкту.

Далі показано доцільність поєднання НМПГЕ та НМКЕ при моделюванні усталених процесів у кусково-однорідних середовищах за умов . Для знаходження невідомих комплексних амплітуд одержано рівняння

та записано на основі теореми 2 інтегральні зображення їх розв'язків.

Для задоволення граничних умов (11) та умови збігу на  $z$ , одержано ГПР:

Після дискретизації в (36), (37) приграничної області та межі поділу середовищ на приграничні та контактні елементи й апроксимації невідомих інтенсивностей джерел в них комплексними постійними, побудовано СЛАР. Підставивши знайдені як розв'язки цієї СЛАР невідомі у формули (35), обчислено шукані функції та похідні від них величини.

Для порівняння з відомим аналітичним розв'язком розглянуто задачу геоелектророзвідки постійним струмом над вертикальним ідеальним контактом двох геосередовищ у півплощині і відзначено, що за допомогою НМКЕ вдалося досягнути вищої точності, ніж іншими чисельно-аналітичними методами, зокрема, НМПГЕ та НМГЕ. Цей факт та ще й зменшення розмірності матриці СЛАР свідчить про доцільність його застосування.

Практичну реалізацію описаного вище способу розглянуто на прикладі актуальної задачі дослідження і прогнозування нафтогазових покладів. В якості найпростіших моделей нафтогазових родовищ [19, 25], складених з двох покладів, вибрано в півплощині та гірському хребті (змодельованому прямим кутом) на глибині  $h$  дві однакові високоомні лінзи зі змінною відстанню  $d$  між ними й оцінено роздільну здатність різних систем спостережень, зокрема, градієнтної та диференціальної (прямої й зворотної) установок. Також розглянуто наближену до реальних родовищ модель Ю.С. Королькова, яка враховує зміну опорів над покладом і по його краях під впливом різних фізико-хімічних процесів [19]. Отримані чисельні результати показали, що при  $d/h=0.25$  на графіках позірною опорів  $\rho_a$  для обох установок ніякої диференціації не спостерігається і складна неоднорідність фіксується як одне високоомне включення: максимумом градієнтної і почерговими екстремумами прямої і зворотної диференціальних установок. При збільшенні відносної відстані між покладами спостерігається поступове роздвоєння аномалії на кривих  $\rho_a$  обох установок аж до чіткої їх диференціації. Отримані дані свідчать, що в простих розрізах (без екранів) електророзвідувальні методи постійного струму, особливо їх диференціальні різновидності, можуть успішно використовуватись для оконтурення і розділення високоомних включень типу нафтогазових родовищ [39, 48, 51, 52, 54–56, 58].

При моделюванні нестационарних процесів теплопровідності і електромагнетизму розглянуто двовимірну пластину квадратної форми з довжиною сторони  $b$ м, яка містила прямокутне включення розміром  $4\text{м} \times 1\text{м}$  з іншого матеріалу, розміщене в її центрі й орієнтоване довшою

сторону вздовж осі  $x_1$ . На границі пластини задавали нульові температури або розподіл компонент ЕП. В області діяли два джерела тепла в точках, інтенсивності і відповідно. Контур  $C$  вибирали у вигляді квадратної рамки розміром  $5.5\text{м} \times 5.5\text{м}$ , яку розташовували на відстані  $0.25\text{м}$  від межі області, залежність сили струму від часу в ній змінювали за законом одиничного ступеня. У початковий момент часу теплове або електромагнітне поле було відсутнє.

Проведені дослідження показали, що диференціація кривих температури та теплового потоку, а також вертикальної компоненти вектора магнітної індукції краще проявляється на границі розділу середовищ, а також у включенні, що якраз і свідчить про його наявність при розв'язуванні задач виявлення і розпізнавання чужорідних зон [12, 27]. Використання на межі поділу середовищ контактних елементів замість граничних або приграничних дало змогу автоматично задовольнити першу умову контакту (рівність температур чи тангенціальних компонент вектора напруженості електричного поля) і внаслідок цього зменшити розмірність матриці СЛАР порівняно з непрямими методами граничних або приграничних елементів й водночас досягнути вищої точності.

У шостому розділі здійснено математичне моделювання процесів поширення теплового та електромагнітного полів у кусково-однорідних середовищах з локальними областями неоднорідності матеріалу (ЛОНМ). Основною відмінністю розглянутих у цьому розділі об'єктів є те, що фізичні характеристики матеріалу деякої локальної області кожної зони неперервно залежать від координат [16, 22, 23]. Зрозуміло, що моделювання вказаних процесів у локально-градієнтних кусково-однорідних середовищах зумовило доцільність використання для врахування додаткового впливу локальних неоднорідностей неklasичного МСР [7, 8].

При математичному моделюванні процесу поширення теплового поля у локально-градієнтному кусково-однорідному середовищі невідому температуру описано системою рівнянь [1], граничними, контактними та початковими умовами (19), (20). Тут, – диференціальні оператори, який описують відповідно однорідне середовище та вплив ЛОНМ, в якій коефіцієнти тепло- та температуропровідності залежать від координат. Використавши НМПГЕ та теорему 1, записано інтегральні зображення розв'язків рівнянь (38):

та одержано ГР:

Оскільки в оператор входять невідомі перші похідні за координатами та часом від температури, в областях  $\Omega_{mg}$  проведено  $H_{mi}$  паралельних до осей  $x_1, x_2$  прямих або паралельних до площин  $x_1 0 x_3, x_2 0 x_3, x_1 0 x_2$  площин ( $H_{mi}$  – непарні числа) з кроками, які покрили її нерівномірною сіткою. Вузли сітки визначено парами  $(h_1, h_2)$  або трійками чисел  $(h_1, h_2, h_3)$ , зокрема, для внутрішніх  $\mathbf{M}_v =$ , а для граничних – одне з цих чисел рівне 0 або  $H_{i+1}+1$ , а друге або два інші змінюються від 1 до  $H_i$ .

Щоб записати сіткову функцію оператора, апроксимовано та по ( – координати вузлів сітки), застосувавши класичні та неklasичні скінченні різниці. Отже, не залежить від часу і відповідає

значенню шуканої температури у точці в кінцевий момент  $(p-1)$ -го інтервалу. Для знаходження значень похідних у внутрішніх вузлах використано центральні різниці. Для граничних вузлів, що належать , значення  $i$ -ої похідної визначено відповідно правими або лівими різницями, для знаходження похідних за часом використано праві різниці. Значення  $j$ -ої похідної ( $j \neq i$ ) виражено через значення у даному вузлі  $i$  у двох найближчих до нього в додатному та від'ємному напрямках осі  $Ox_j$  граничних вузлах [1]. Очевидно, що на першому кроці у вузлах сітки вибрано початковий розподіл. Використавши класичні та неklasичні скінченні різниці у операторі, на  $p$ -му кроці за часом одержано сіткову функцію. Для інтерполяції оператора за цією сітковою функцією за допомогою квадратичних лагранжевих чотирикутних елементів з 9 вузлами (при  $n=2$ ) або квадратичних лагранжевих об'ємних елементів з 27 вузлами (при  $n=3$ ) на  $\partial\Omega_{mg}$  введено додаткові точки між крайніми у своїх множинах граничними вузлами сітки. Здійснено просторово-часову дискретизацію співвідношень (40), (41) і побудовано дискретно-континуальні моделі для двох покровових часових схем: СППУ та СЕПУ. На кожному часовому інтервалі у ПГЕ невідому інтенсивність джерела апроксимовано поліномом за часом. Невідомі коефіцієнти знайдено зі СЛАР, отриманих після просторово-часової дискретизації на  $P$ -му кроці для обох часових схем у колокаційному сенсі з (40), (41). При цьому в на  $P$ -му кроці використано значення температури у вузлах сітки, обчислені в кінці попереднього інтервалу за формулою (39).

При математичному моделюванні розподілу потенціальних полів у неоднорідному середовищі невідомий потенціал описано рівнянням:

де оператор описує вплив ЛОНМ.

Використавши НМПГЕ, НМКЕ та теорему 2, записано інтегральні зображення розв'язків рівнянь (42).

Для задоволення граничних умов з (8), умов збігу на з та рівняння в ЛОНМ одержано:

Оскільки в оператор входять невідомі перші похідні за координатами від потенціалу, в області  $\Omega_g$  використано неklasичний МСР та інтерполяцію невідомих функцій аналогічно описаному вище, опускаючи часову змінну. Дискретно-континуальну модель для знаходження інтенсивностей невідомих джерел, введених у приграничних і контактних елементах, які апроксимовані постійними, та невідомих у вузлах сітки, зведено до СЛАР, утвореної внаслідок задоволення в колокаційному сенсі рівнянь (44)–(46).

Далі в шостому розділі викладено підходи до знаходження компонент векторів напруженостей електричного та магнітного поля для квазістаціонарної моделі у провідному неоднорідному півпросторі, складеному з включень довільної форми, які містять локальні області неоднорідності, де електропровідність та магнітна проникливість залежать від трьох декартових координат [14, 28, 40, 45, 49]. Розглянуто півпростір, складений з  $M$  зон, які перебувають між собою в ідеальному електромагнітному контакті, в контурах  $C_m$  діє сторонній струм. У квазістаціонарному наближенні

для визначення компонент векторів напруженості електричного та магнітного полів у провідному півпросторі одержано системи диференціальних рівнянь, які доповнено початковими, граничними і контактними умовами (19), (20). Тут  $\nabla$  – оператори, які описують вплив ЛОНМ.

Для знаходження розв’язків вказаних задач використано НМПГЕ, на основі теореми 1 записано інтегральні зображення розв’язків рівнянь (47), (48):

де  $\mathcal{G}$  – згортка функції Гріна, яка автоматично задовольняє нульові умови на границі півпростору, з інтенсивностями джерел струму при допущенні нульових початкових умов;  $\mathcal{G}_0$  – згортка фундаментального розв’язку з інтенсивностями джерел струму та функціями розширених початкових умов.

Для задоволення умов контакту (20) та граничних умов з (19) (при визначенні компонент магнітного поля), одержано ГПР:

Використавши описану вище дискретизацію  $\Omega_{mg}$ , покроковий процес за часом та інтерполяцію часто вживаними квадратичними елементами, записано в межах  $p$ -го інтервалу апроксимаційні формули для  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{H}$  в областях неоднорідності за їхніми значеннями у вузлах сітки, утвореної в  $\Omega$ , в кінці попереднього кроку за часом. Здійснено просторово-часову дискретизацію ГПР (51) та (52), (53), побудовано дискретно-континуальні моделі для двох покрокових часових схем: СППУ та СЕПУ. На кожному часовому інтервалі у ПГЕ невідомі інтенсивності джерел апроксимовано постійними. Ці невідомі постійні знайдено зі СЛАР, отриманих у колокаційному сенсі з (51) та (52), (53). При цьому в операторах  $\mathcal{L}$ , на  $P$ -му кроці використано значення шуканих функцій у вузлах сітки, обчислені в кінці попереднього інтервалу за формулами (49) та (50).

Розглянуто декілька часткових випадків. Наведено інтегральні зображення та ГПР для середовищ, у яких магнітна проникливість є гладкою функцією від координат, коли в  $\Omega_{mg}$  тільки електропровідність залежить від координат, а магнітна проникливість є постійною, а також для середовищ, у яких електропровідність є гладкою функцією від координат та коли в  $\Omega_{mg}$  тільки магнітна проникливість залежить від координат, а електропровідність є постійною. Розглянуто випадок, коли в провідному півпросторі міститься лише одна ЛОНМ та відзначено відмінності, які тоді виникають.

Розв’язано задачу геоелектророзвідки постійним струмом в неоднорідному гірському хребті, який змодельовано прямим кутом із заокругленою вершиною. Чисельні результати показали, що в ЛОНМ та в прилеглий до неї області спостерігається згущення екіпотенціальних ліній при зростанні в ній питомого опору. Протилежний ефект маємо при низькоомній ЛОНМ, в цьому випадку екіпотенціальні лінії розташовуються рідше. Необхідна точність була досягнута для 21-го вузла сітки, тобто для  $N=21$ . Точність операцій чисельного інтегрування за приграничними елементами і за елементами дискретизації області локальної неоднорідності контролювалась так: величина інтегралу за елементом порівнювалась із сумою величин інтегралів за чотирма його складовими.

Розроблено ефективний підхід, який дозволяє розраховувати потенціал електричного поля і густину струму, нестационарне теплове поле або компоненти ЕМП у локально-градієнтних кусково-однорідних середовищах з криволінійними границями поділу. Він базується на комбінованому використанні переваг аналітичних та чисельних методів і включає основні ідеї методів розщеплення, приграничних елементів, колокації та в областях локальних неоднорідностей неklasичного МСР. Висока точність одержаних розв'язків всередині однорідних зон досягається використанням фундаментальних розв'язків або функцій Гріна рівнянь теплопровідності та Пуассона, а на межах поділу середовищ і в ЛОНМ забезпечується чисельними алгоритмами за рахунок можливості застосування різної кількості елементів дискретизації приграничних областей (чи меж поділу при моделюванні потенціальних полів) та областей локальних неоднорідностей. Останні використовують апроксимацію криволінійних меж поділу середовищ квадратичними чи кубічними елементами; нерівномірні шаблони скінченно-різницевої сітки в області неоднорідності та інтерполяцію шуканих функцій сплайнами високого порядку.

Спостережувані внаслідок обчислювального експерименту ефекти “стиску-розтягу” та кручення можуть бути використані під час розв'язування обернених задач геоелектророзвідки для вибору коректних початкових наближень.

У **сьомому** розділі здійснено математичне моделювання процесу поширення нестационарного та розподілу стаціонарного теплового поля у кусково-однорідних середовищах з нелінійною поведінкою матеріалів зон [9, 10, 34, 35, 42, 41, 46, 50]. Коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності матеріалу зони  $\Omega_m$  є неперервними функціями від температури в локальних областях.

Показано, що математична модель розподілу стаціонарного теплового поля у кусково-однорідних областях з нелінійною поведінкою матеріалів зон складається з системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, доповненої граничними з (8) та умовами ідеального теплового контакту, аналогічними (20). Після введення прямого перетворення Кірхгофа для знаходження величини одержано математичну модель, аналогічну (8), доповнену контактними умовами на межі поділу середовищ. Використано НМПГЕ і на основі теореми 2 записано інтегральні зображення, аналогічні першим з (10), та ГПР: при  $n=2$  до ГПР необхідно додати умови в нескінченно віддалених точках.

Апроксимувавши невідомі інтенсивності джерел в межах ПГЕ постійними та застосувавши до (54), (55) метод колокації, одержано систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНЛАР). Після розв'язання ітераційним методом цієї системи за допомогою інтегральних зображень для і оберненого перетворення Кірхгофа знайдено шукану температуру.

Далі показано, що математична модель поширення нестационарного теплового поля у кусково-однорідних областях з нелінійною поведінкою матеріалів зон складається з системи нелінійних рівнянь, доповненої граничними, початковими та контактними умовами (19) і (20).



Диференціальний оператор рівняння (56) розщеплено на два оператори, які описують відповідно однорідне середовище та вплив нелінійної поведінки матеріалу зони. Використавши НМПГЕ та ввівши в приграничній області джерела невідомої інтенсивності, записано на основі теореми 1 інтегральні зображення розв'язків рівнянь (56)

та ГР для задоволення граничних умов та умов ідеального теплового контакту:

Оскільки в оператор входять похідні від невідомої температури за часом та координатами, їх апроксимовано за допомогою класичних і некласичних скінченних різниць та використано інтерполяцію сіткової функції, що описує вплив нелінійності. Дискретно-континуальну модель для знаходження інтенсивностей невідомих джерел, введених у ПГЕ, зведено до СЛАР, утвореної внаслідок задоволення в колокаційному сенсі ГР (57), (58).

Як частковий випадок в цьому ж розділі розглянуто випадок простої нелінійності (коефіцієнти теплопровідності кожної зони незначно залежать від шуканої функції і їх прийнято постійними) і запропоновано підхід, який ґрунтується на поєднанні НМПГЕ з перетворенням Кірхгофа. Внаслідок використання перетворення Кірхгофа нелінійне вихідне рівняння лінеаризовано і для знаходження одержано математичну модель, аналогічну (18)–(20). Використано НМПГЕ і на основі теореми 1 записано інтегральні зображення розв'язків лінеаризованих рівнянь та ГР:

Після просторово-часової дискретизації, апроксимації введених в ПГЕ невідомих інтенсивностей джерел поліномами за часом з коефіцієнтами та застосування методу колокації до (59), (60) на  $P$ -му часовому інтервалі одержано СНЛАР для знаходження. Знайдені використано в інтегральних зображеннях і за допомогою оберненого перетворення Кірхгофа визначено шукану температуру та тепловий потік для довільного кроку за часом.

Досліджено розподіл стаціонарного теплового поля у кусково-однорідній півплощині з нульовим розподілом температури на границі і лінійно залежними від температури коефіцієнтами теплопровідності [50]: – задана стала. Чисельні результати показали вплив термочутливості, який проявився у вищих (при додатніх ) чи нижчих (при від'ємних ) порівняно з нетермочутливим випадком значеннях температури. СНЛАР розв'язана ітераційним методом, за початкові наближення в умовах контакту взято тіло, в якому коефіцієнт провідності матеріалу кожної зони  $\Omega_m$  не залежить від шуканої величини. Під час розв'язування СНЛАР похибка порядку  $10^{-4}$  (тобто різниця між значеннями, одержаними на двох сусідніх кроках розрахунку) була досягнута за 5-6 кроків.

Досліджено нестационарне температурне поле у двовимірній пластині квадратної форми [35] та паралелепіпеді за нульових початкових умов і граничних умов: та за відсутності джерел тепла. Коефіцієнти тепло- та теплопровідності вибирали у вигляді , де – задана стала. На рис. 8

порівняно значення температурного поля для термочутливого та нетермочутливого паралелепіпеда у внутрішніх (а, б) та граничних (в) точках.

Рис. 8. Порівняння чисельних результатів для термочутливого (тонші криві з символами) та нетермочутливого (товстіші криві) паралелепіпеда

Проведені обчислювальні експерименти показали, що спільне застосування НМПГЕ та перетворення Кірхгофа дозволяє з високою точністю розв'язувати стаціонарні та нестаціонарні задачі теплопровідності у кусково-однорідних областях з нелінійною поведінкою матеріалів зон.

У **восьмому** розділі здійснено математичне моделювання процесу нелінійного деформування [13, 17, 44]. Основною відмінністю розглянутих у цьому розділі об'єктів було те, що модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона деякої локальної області неперервно залежали від координат і тензора деформації. Як і в шостому розділі, ускладнення фізичної моделі спричинило використання неklasичного МСР для врахування впливу локальних неоднорідностей.

Розглянуто тіло, яке займає в декартовій системі координат область [13, 17, 38, 44]. У ньому діють масові сили, причому при виконуються умови плоскої деформації. Безрозмірний модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона задавали формулами: де при , при ; – неперервні однозначні функції декартових координат  $x_1, \dots, x_n$  та тензора деформацій, які при наближенні до граничної поверхні  $\partial\Omega_g$  області прямують до нуля. Враховуючи закон Гука для ізотропного пружного тіла, вигляд функцій  $\mu$  і  $\nu$ , співвідношення Коші між деформаціями та переміщеннями, а також рівняння рівноваги, показано, що шукані компоненти вектора переміщень задовольняють рівняння [13, 17] та граничні умови з (9). Тут – диференціальний оператор, який описує вплив нелінійного характеру залежності фізичних характеристик середовища.

Для побудови інтегрального зображення розв'язку рівняння (61) згідно НМПГЕ введено невідомі масові сили в напрямі осі  $x_i$  та використано теорему 2:

Записано ГР та рівняння в області неоднорідності:

При  $n=2$  додано рівняння, які виражають рівність нулю сумарної дії всіх сил, прикладених в , в напрямках  $x_i$ :

Оскільки в підінтегральну функцію нелінійно входять невідомі компоненти тензора деформацій, а також їх перші похідні за координатами, область  $\Omega_g$  покрито сіткою, аналогічною описаній у шостому розділі. Щоб записати сіткове зображення для апроксимовано  $\varepsilon_j$  по  $\varepsilon^M = \varepsilon(x^M)$  із застосуванням центральних різниць у внутрішніх вузлах, правих або лівих різниць та неklasичних скінчених різниць у граничних вузлах. Тоді замість одержано сіткову функцію, яку проінтерпольовано в області неоднорідності.

Дискретно-континуальну модель для знаходження інтенсивностей невідомих джерел, введених у ПГЕ і апроксимованих постійними, зведено до СНЛАР, утвореної внаслідок

задоволення в колокаційному сенсі рівнянь (62), (63). До одержаної СНЛАР застосовано метод продовження розв'язку за параметром, в якості початкового наближення вибрано однорідне пружне середовище.

Проведено чисельні дослідження тензора деформацій для випадку, коли  $\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < x_{1,1}, x_{2,0} < x_2 < x_{2,1}\}$ ,  $\psi_1 = 1.22 \cdot 10^{-4}$ ,  $\psi_2 = 0$  у точці  $(2; 0)$ , де  $x_{1,1} = 60$ ,  $x_{2,0} = -25$ ,  $x_{2,1} = 25$ . Тоді границя  $\partial\Omega$  складалася з п'яти інтервалів  $\partial\Omega_t$ , причому . На  $\partial\Omega_t$  задавали умови: . Область  $\Omega_g$  була прямокутником з вершинами  $(1; -1)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 1)$ , а функції  $\mu$  та  $\nu$  мали вигляд . Метод продовження розв'язку за параметром реалізували для 21-точкового шаблону ( $H_t = 3$ ), при цьому кількість кроків становила три, а кількість циклів на кожному кроці не перевищувала шести для досягнення відносної точності  $10^{-2}$ . На рис. 9 подано залежності компонент тензора деформацій в однорідному пружному середовищі та з врахуванням нелінійного характеру залежності модуля зсуву.

Рис. 9. Залежність компонент тензора деформацій від координати  $x_2$  для різних відрізків  $x_1$  (криві 1,5 відповідають границі  $x_1 = 0$ , 2 –  $x_1 = 0.33$ , 3,6 –  $x_1 = 0.67$ , 4,7 –  $x_1 = 1$ ) в однорідному пружному середовищі (криві 5–7) та з врахуванням нелінійного характеру залежності модуля зсуву (криві 1–4).

При дослідженні процесу нелінійного деформування абсолютні значення деформацій при  $x_1 = 1$  є меншими за при  $x_1 = 0$ , хоч перший відрізок знаходиться ближче до точки прикладання сили, ніж другий. Вказана інверсія результатів виникає лише тоді, коли модуль зсуву в області  $\Omega_g$  менший, ніж за її межами. Для однорідного пружного середовища деформації спадають з віддаленням від точки прикладання сили. Окрім того, в розглянутому неоднорідному середовищі абсолютні значення деформацій в окремих зонах зростають більше, ніж в 2,5 рази порівняно з однорідним. З віддаленням від ділянки  $x_1 = 1$  вплив локальної неоднорідності послаблюється, а вплив сили зростає, і чисельні результати для обох випадків наближаються між собою.

Для випадку тіла з локальною градієнтною неоднорідністю показано, що результати, отримані запропонованим підходом, є кращими, ніж при використанні класичного МСР, і збігаються з одержаними за допомогою МСЕ. Проведені чисельні дослідження показали високу ефективність поєднання приграничних елементів з некласичним МСР при моделюванні процесів нелінійного деформування для випадків, коли  $\Omega_g$  займала незначний порівняно з  $\Omega$  об'єм.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Проведені у дисертаційній роботі теоретичні дослідження та їх практичне впровадження дали змогу розв'язати важливу науково-прикладну проблему теоретичного обґрунтування даних температурних і електромагнітних вимірювань у земній корі, параметрів напружено-деформованого стану неоднорідних елементів конструкцій шляхом побудови математичних моделей процесів поширення теплового й електромагнітного полів, нелінійного

деформування у кусково-однорідних і локально-неоднорідних середовищах та ефективних чисельно-аналітичних підходів, які ґрунтуються на поєднанні методів приграничних елементів та неklasичних скінченних різниць, до визначення й дослідження цих полів та станів.

На цій основі отримано такі основні наукові та прикладні результати:

1. Для дослідження процесів поширення теплового та електромагнітного полів у кусково-однорідних об'єктах довільної форми, локально-градієнтних середовищах та з нелінійною поведінкою матеріалів зон побудовано математичні моделі, складені з систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, умов контакту на межах поділу середовищ, заданих граничних та початкових умов.
2. Для визначення розподілів стаціонарних полів (теплового, електричного, магнітного), усталених гармонічних коливань та напружено-деформованого стану у кусково-однорідних середовищах та з локальними областями неоднорідності матеріалу запропоновано математичні моделі, складені з систем рівнянь Пуассона, Гельмгольца та Нав'є-Стокса, умов контакту на межах поділу середовищ та заданих граничних умов.
3. Обґрунтовано ефективність застосування непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) для отримання і чисельно-аналітичного розв'язування систем граничних інтегральних рівнянь, до яких зводяться побудовані математичні моделі, у кусково-однорідних середовищах, що дозволило порівняно з непрямым методом граничних елементів спростити побудову дискретно-континуальних моделей внаслідок послаблення їх сингулярності та істотно підвищити точність при обчисленні шуканих величин (температури, теплового потоку, компонент електромагнітного поля, параметрів напружено-деформованого стану) поблизу границь чи меж поділу середовищ.
4. При математичному моделюванні стаціонарних, нестаціонарних та усталених фізичних процесів у кусково-однорідних областях довільної форми за умов ідеального контакту між складовими, застосовано і розроблено чисельно-аналітичні підходи, які ґрунтуються на використанні НМПГЕ та апарату узагальнених функцій, зокрема, непрямого методу контактних елементів. Це дозволило на межі поділу середовищ аналітично врахувати умову неперервності шуканих функцій (потенціалу, температури, тангенціальних компонент електромагнітного поля) і, як наслідок, вдвічі зменшити кількість граничних інтегральних рівнянь для задоволення умов контакту.
5. Здійснено математичне моделювання процесів поширення теплового і електромагнітного полів у локально-градієнтних середовищах. Для отримання і чисельно-аналітичного розв'язування систем інтегральних рівнянь, до яких зводяться побудовані математичні моделі, обґрунтовано доцільність поєднання НМПГЕ з неklasичним методом скінченних різниць, а при дослідженні стаціонарних процесів ще з непрямым методом контактних елементів.

6. Для математичного моделювання стаціонарного та нестаціонарного теплових полів у кусково-однорідних середовищах з урахуванням залежності теплофізичних характеристик від температури розроблено чисельно-аналітичні підходи, які базуються на спільному використанні НМПГЕ, перетворення Кірхгофа та ітераційних методах. Проведені обчислювальні експерименти підтвердили необхідність врахування залежності коефіцієнта теплопровідності від температури, оскільки відносна похибка значень температурного поля, отриманих з врахуванням цієї залежності і без нього досягає 8–10% і не зменшується з плином часу для випадку простої нелінійності, тобто, коли коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури.
7. При математичному моделюванні процесу нелінійного деформування набув розвитку підхід, який ґрунтується на поєднанні НМПГЕ, неklasичного МСР та методу продовження розв'язку за параметром і дає можливість визначати параметри напружено-деформованого стану середовищ з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик (модуля зсуву та коефіцієнта Пуассона) від координат та тензора деформацій і може використовуватись при проектуванні, виготовленні та забезпеченні надійної експлуатації елементів конструкцій сучасної техніки.
8. На основі запропонованих чисельно-аналітичних підходів розв'язано низку прямих задач теорій геоелектромагнетизму, теплопровідності та нелінійної пружності. Досліджено розподіл електричного й усталеного гармонічного електромагнітного полів, напружено-деформований стан та процеси поширення нестаціонарного теплового й квазістаціонарного електромагнітних полів у неоднорідних об'єктах. Проведено первинну інтерпретацію температурних і геоелектромагнітних даних та параметрів напружено-деформованого стану у таких областях.
9. Чисельні розрахунки й аналіз результатів досліджень дозволили побудувати на базі різних компонент електромагнітного поля допоміжні криві, зокрема, позірні електропровідності, одержані за профілями чи як функції від часу, амплітудні й фазові криві позірного опору, які використовують для оцінки геометричних та фізичних параметрів включень під час вирішення проблем пошуку родовищ корисних копалин у земній корі, визначення місцезнаходження та розмірів порожнин і дефектів.
10. Проведені обчислювальні експерименти свідчать про доцільність застосування індуктивних імпульсних електророзвідувальних методів для виявлення високопровідних включень типу рудних родовищ та високоомних включень типу нафтових і газових покладів. Первинна інтерпретація даних показала, що загальними сприятливими умовами для виявлення і дослідження чужорідних областей з провідністю, вищою чи нижчою, ніж геосередовище, треба вважати співвимірну з горизонтальними розмірами (чи меншу) глибину їх залягання.

Розроблені в дисертації підходи й побудовані за модульним принципом пакети прикладних програм дозволяють моделювати широкий клас нестационарних, стаціонарних та усталених фізичних процесів у кусково-однорідних та локально-неоднорідних середовищах для задач геофізики, теплофізики і механіки, а також легко досліджувати інші математичні моделі, що містять системи диференціальних рівнянь у частинних похідних з відомим фундаментальним розв'язком.

### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. □– Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996.– 220 с.
2. Журавчак Л.М. Моделювання неусталеного електромагнітного поля в зонально-однорідних тілах поєднанням методів приграничних та контактних елементів форми // Доп. НАН України.– 2004.– № 11.– С. 64–70.
3. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Математичне моделювання електромагнітного поля у процесі дослідження складних геоелектричних розрізів // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ.– 2004.– № 3.– С. 98–104.
4. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Моделювання розподілу електромагнітного поля у зонально-однорідних об'єктах // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп'ютерні науки та інформаційні технології.– 2004.– № 521.– С. 120–129.
5. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Розпізнавання об'ємних локальних неоднорідностей за нестационарним тепловим полем тіла // Доп. НАН України.– 2005.– № 10.– С. 42–47.
6. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Математичне тривимірне моделювання усталених коливань у кусково-однорідному півпросторі // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ.– 2005.– № 2.– С. 14–20.
7. Григоренко Я.М., Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Решение задач о напряженном состоянии неоднородных тел с учетом физической нелинейности на основе метода граничных элементов // Прикл. механика.– 1995.– Т. 31, №11.– С. 10–17.
8. Григоренко Я.М., Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Про розв'язання просторової задачі для зонально-однорідного тіла при неідеальному контакті // Доп. НАН України.– 1996.– № 2.– С. 48–52.
9. Журавчак Л.М. Розв'язування просторової задачі термопружності для зонально-однорідного термочутливого тіла довільної форми // Доп. НАН України.– 2002.– №8.– С. 37–41.
10. Журавчак Л.М. Розв'язування просторової нестационарної задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2002.– Т. 45, № 1.– С. 137–142.

11. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Моделювання взаємного впливу нафтогазоносних покладів на розподіл електромагнітного поля // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ.– 2004.– № 4.– С. 60–66.
12. Журавчак Л.М. Квазістаціонарна модель електромагнетного поля для зонально-однорідного тіла // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 2005.– № 2.– С. 89–96.
13. Журавчак Л.М. Розв'язування просторових нелінійних задач теорії пружності поєднанням приграничних елементів і неklasичної різницевої схеми // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2001.– Т. 44, №2.– С. 83–90.
14. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Побудова дискретно-континуальної моделі електромагнітного поля в локально-неоднорідному провідному просторі // Інформаційні технології і системи.– 2001.– Т.4, № 1–2.– С. 78–84.
15. Журавчак Л.М. Порівняння розв'язків задач теорії пружності для різних приграничних елементів // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 2002.– № 6.– С. 79–84.
16. Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Петльований А.Т. Поєднання граничних, приграничних та скінченних елементів в задачі пружності для неоднорідного тіла // Доп. НАН України.– 2005.– № 5.– С. 46–50.
17. Журавчак Л.М. Приграничні елементи і неklasична різницева схема при розв'язуванні задач фізичної нелінійної теорії пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 2000.– № 1.– С. 32–38.
18. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Інтерпретація нестационарного фільтраційного потоку при визначенні геометричних параметрів непровідного включення // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2001.– Т. 44, №1.– С. 174–179.
19. Sapuzhak Ya.S., Zhuravchak L.M. The technique of numerical solution of 2-D direct current modeling problem in inhomogeneous media // Acta Geophysica Polonica.– 1999.– Vol.XLVII, No 2.– P.149–163.
20. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Порівняння методів граничних і приграничних елементів для розв'язування задач теорії пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 1997.– № 3.– С. 50–56.
21. Михаськів В.В., Журавчак Л.М., Фітель Г.В. Використання граничних і приграничних елементів у двовимірній моделі нестационарної теплопровідності // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2003.– Т. 46, № 2.– С. 155–161.
22. Грицько Є.Г., Гудзь Р.В., Журавчак Л.М. Метод граничних елементів та ермітові скінченні елементи у задачах пружності для тіл з неоднорідностями // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 1999.– № 5.– С. 99–101.
23. Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Петльований А.Т. Розв'язування статичної задачі термopужності для локально-неоднорідного тіла поєднанням граничних, приграничних та скінченних елементів // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2006.– Т. 49, №2.– С. 148–156.

24. Журавчак Л.М. Поєднання приграничних і контактних елементів та неklasичної скінченно-різницевої схеми для знаходження потенціалу електричного поля в неоднорідному середовищі // Теорія обчислень: Зб. наук. пр.– Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 1999.– С. 166–170.
25. Журавчак Л.М. Використання приграничних і контактних елементів у задачах геоелектрики для неоднорідного гірського хребта // Вісн. Львів. ун-ту: Прикл. мат. та інформ.– 2000.– Вип. 1.– С. 117–122.
26. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М., Сапужак О.Я. Математичне і фізичне моделювання при електромагнітних дослідженнях геосередовищ // Сб. науч. труд. Нац. горной академии Украины.– 1999.– Т.3. Геофізика, №6.– С. 110–113.
27. Журавчак Л.М. Поєднання методів приграничних та контактних елементів при розв'язуванні нестационарної задачі теплопровідності для зонально-однорідного тіла // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. мат. та інформ.– 2004.– Вип. 8.– С. 122–132.
28. Журавчак Л.М. Моделювання неусталеного електромагнітного поля у провідному півпросторі з локальною неоднорідністю // Геофізичний журнал.– 2002.– Т. 24, № 5.– С. 120–126.
29. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Побудова інтегрального зображення розв'язку задачі теплопровідності для зонально-однорідного тіла складної форми // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.– Київ: Ін-т математики НАН України, 1994.– Вип. 7.– С. 59–64.
30. Журавчак Л.М. Теоретичні аспекти непрямих методів приграничних і частково-граничних елементів // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.– Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2002.– Вип. 8.– С. 256–265.
31. Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Петльований А.Т. Моделювання напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл методами граничних та приграничних елементів // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. мат. та інформ.– 2004.– Вип. 9.– С. 145–156.
32. Журавчак Л.М. Квазістационарна модель для визначення напруженості електромагнітного поля у зонально-однорідному півпросторі // Вісник Київ. нац. ун-ту: Геологія.– 2004.– № 29–30.– С. 104–107.
33. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М. Застосування методу приграничних елементів та покрокового процесу зміни часу в нестационарних просторових задачах теорії потенціалу // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.– Київ: Ін-т математики НАН України, 1995.– Вип. 10.– С. 48–57.
34. Журавчак Л.М. Розв'язування двовимірної нестационарної змішаної задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла методом приграничних елементів // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.– Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2003.–



Вип. 10.– С. 66–74.

35. Журавчак Л.М., Михаськів В.В., Фітель Г.В. Розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для термочутливого многокутника методами граничних та приграничних елементів // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. мат. та інформ.– 2003.– Вип. 6.– С. 151–156.
36. Журавчак Л.М. Порівняння приграничних елементів різних типів під час розв'язування задач теорії потенціалу // Прикл. пробл. мех. і мат.– 2003.– № 1.– С. 61–67.
37. Журавчак Л.М. Розв'язування задач геоелектрики методом приграничних елементів для гірського хребта // Праці НТШ. Геофізика.– Львів, 2002.– Т.VIII.– С. 30–39.
38. Журавчак Л.М. Поєднання приграничних елементів та скінченних різниць при розв'язуванні просторових задач теплопровідності для неоднорідних тіл // Крайові задачі термомеханіки: Зб. наук. праць.– Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.– С. 130–135.
39. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М., Фітель Г.В., Шуміліна Н.В. Автоматизація числових досліджень фізичних полів у многокутниках на основі методу приграничних елементів // Вісник Львів. ун-ту: Серія прикл. мат. та інформ.– 2000.– Вип.3.– С. 100–105.
40. Журавчак Л.М. Квазістационарна модель для визначення напруженості магнітного поля у локально-неоднорідному напівпросторі // Праці НТШ. Геофізика.– Львів, 2006.– Т.XVII.– С. 36–46.
41. Грицько Є.Г., Журавчак Л.М., Фітель Г.В. Розв'язування задачі теплопровідності з нелінійною граничною умовою III роду методом приграничних елементів // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.– Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2000.– Вип. 5.– С. 82–90.
42. Грицько Є.Г., Гудзь Р.В., Журавчак Л.М., Фітель Г.В. Числово-аналітичний спосіб розв'язування нестационарної задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами // Вісн. Львів. ун-ту: Сер. мех.-мат.– 1999.– Вип. 52.– С. 29–36.
43. Zhuravchak L.M, Shumilina N.V. Mathematical modeling of non-stationary thermal field in spatial solids for recognition of homogeneous inclusions // Proc. of Sixth Intern. Congress on Thermal Stresses.– Vienna, 2005.– Vol. 2.– P. 521–524.
44. Журавчак Л.М. Розв'язування просторових нелінійних задач теорії пружності методом приграничних елементів // Матер. Міжнар. наук. конф. „Сучасні проблеми механіки і математики”.– Львів: ІППММ, 1998.– С. 110–111.
45. Grits'ko E.G., Zhuravchak L.M. Quasi-stationary approximation of electromagnetic energy spreading in a locally inhomogeneous conductive halfspace // Proc. of IVth Intern. Seminar/Workshop “Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory”.– Lviv, 1999.– P. 84–87.

46. Журавчак Л.М. Розв'язування двовимірної задачі термопружності для неоднорідного термочутливого тіла поєднанням методу приграничних елементів та неklasичних скінченних різниць // Матер. VI міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур".– Львів, 2003.– С. 175–177.
47. Журавчак Л.М., Забродська Н.В. Розв'язування крайових задач для систем рівнянь Гельмгольца у кусково-однорідному півпросторі за допомогою непрямого методу приграничних елементів // Матер. Всеукр. наук. конф. "Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища".– Київ, 2006.– С. 131–133.
48. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М., Сапужак О.Я., Романюк О.І. Можливості математичного моделювання при електрометричних дослідженнях нафтогазових родовищ // Матер. 6-ї Міжнар. наук.-практ. конф. „Нафта і газ України – 2000”.– Івано-Франківськ: УНГА, 2000.– Т.1.– С. 274–275.
49. Grits'ko E.G., Zhuravchak L.M. Computation of the magnetic field strenght in a medium with electric and magnetic characteristics locally depending on coordinates // Proc. of IVth Intern. Seminar/Workshop "Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory".– Lviv, 1999.– P. 88–93.
50. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. Розв'язування стаціонарної задачі теплопровідності для зонально-однорідної термочутливої півплощини // Матер. VI міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур".– Львів, 2003.– С. 177–179.
51. Sapuzhak Ya.S., Zhuravchak L.M. Mathematical modeling of complex geoelectric cuts // Abstract of XXI General Assembly of European Geophysical Society.– Haag (Nederland), 1996.– V. 14.– P. 187.
52. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М. Исследование сложных геоэлектрических разрезов методом граничных элементов // Тез. докл. Междунар. конф. „Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных магнитных и электрических полей”.– Воронеж: ВГУ, 1998.– С. 116–117.
53. Журавчак Л.М. Приграничні та контактні елементи у задачах геоелектрики // Тези доп. VI Всеукр. наук. конф. „Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та обчислювальних методів у наукових дослідженнях”.– Львів: Видавн. центр ЛДУ, 1999.– С. 41–42.
54. Sapuzhak Ya.S., Zhuravchak L.M., Sapuzhak O.Ya. To methods of electrometric engineering investigations cuts // Abstract of XXII General Assembly of European Geophysical Society.– Vienna (Austria), 1997.– V. 15.– P. 95.
55. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М., Сапужак О.Я., Романюк О.І. Основные элементы электромагнитной доразведки нефтегазовых залежей // Тез. докл. Междунар. конф.-семинар. им.

- Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных магнитных и электрических полей”.– Ухта: Ухтинский индустриальный институт, 1998.– С. 41–42.
56. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М., Сапужак О.Я., Романюк О.І. Методика комплексної електромагнітної дорозвідки нафтогазових покладів // Тези доп. наук.-практ. конф. “Результати і перспективи геофізичних досліджень у Західному регіоні України”.– Львів: УНГА, ЗУГРЕ, 1998.– С. 38–40.
57. Журавчак Л.М. Поєднання методів приграничних та контактних елементів при моделюванні нестационарного температурного поля у зонально-однорідному тілі // Тези доп. X Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”.– Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2003.– С. 57.
58. Sapuzhak Ya.S., Zhuravchak L.M., Sapuzhak O.Ya. Geoelectric models of Ukrainian Carpathians and potentials of their mathematical investigation // Abstract of the 14-th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth.– Sinaia (Romania), 1998.– P. 48–49.
59. Сапужак Я., Журавчак Л., Сапужак О. Математическое моделирование трехмерных задач импульсной электроразведки при геомониторинге // Тези доп. VI Міжнар. наук.-тех. симпозиуму „Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS – технології” (Алушта).– Львів: Львівське астрономо-геодезичне товариство, 2001.– С. 4–5.
60. Сапужак Я.С., Журавчак Л.М., Сапужак О.Я., Сирожко О.В. Площівні електромагнітні дослідження: розвиток, проблеми та їх вирішення // Тези доп. IV Міжнар. наук. конф. "Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища".– Київ, 2003.– С. 63–65.

### Анотації

**Журавчак Л.М. Математичне моделювання процесів поширення теплового і електромагнітного полів у неоднорідних середовищах методами приграничних елементів та скінчених різниць.**– Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.– Національний університет „Львівська політехніка”, Львів, 2007.

Дисертація присвячена математичному моделюванню процесів поширення теплового та електромагнітного полів, розподілу потенціальних полів у неоднорідних середовищах. Для визначення й дослідження нестационарних, стаціонарних та усталених фізичних полів у кусково-однорідних та локально-неоднорідних об’єктах побудовано математичні моделі у вигляді систем диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, доповнених умовами

контакту на межах поділу середовищ, заданими граничними та при вивченні нестационарних процесів початковими умовами. За допомогою фундаментальних розв'язків отриманих систем рівнянь та інтегральних зображень, до яких зведено диференціальні рівняння моделі, розроблено підходи до розв'язування вказаних задач, які ґрунтуються на новому ефективному чисельно-аналітичному методі – непрямому методі приграничних елементів та його поєднанні з неklasичним методом скінченних різниць у локальних областях неоднорідності матеріалу.

Програмна реалізація запропонованих підходів дозволила провести обчислювальні експерименти для прямих задач теорій геоелектромагнетизму, теплопровідності та фізично нелінійної пружності й отримати нові теплові й електромагнітні закономірності, які використовуються при розв'язуванні проблем пошуку родовищ корисних копалин у земній корі, при визначенні геометричних розмірів чужорідних включень, пустот і дефектів при проектуванні, виготовленні і забезпеченні надійної експлуатації елементів конструкцій сучасної техніки.

**Ключові слова:** математичне моделювання, кусково-однорідні та локально-неоднорідні середовища, нестационарні процеси, теплове поле, електромагнітне поле, непрямий метод приграничних елементів, неklasичний метод скінченних різниць, обчислювальний експеримент.

**Журавчак Л.М. Математическое моделирование процессов распространения теплового и электромагнитного полей в неоднородных средах методами приграничных элементов и конечных разностей.**– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы.– Национальный университет „Львовская политехника”, Львов, 2007.

Диссертация посвящена математическому моделированию физических процессов в кусочно-однородных объектах, локально-неоднородных средах и областях с нелинейным поведением материалов зон. Для определения нестационарных тепловых и электромагнитных полей в кусочно-однородных и локально-неоднородных объектах построены математические модели, которые составлены из систем параболических уравнений, условий контакта на границах раздела сред, граничных и начальных условий. Для изучения установившихся и стационарных процессов разной физической природы (электромагнитных колебаний, распределений потенциальных полей, нелинейного деформирования) в неоднородных объектах построены математические модели, которые составлены из систем эллиптических уравнений, условий контакта на границах раздела сред и граничных условий.

Математическое моделирование базируется на новом эффективном численно-аналитическом методе – непрямом методе приграничных элементов и его совместном использовании с неklasическим методом конечных разностей в локальных областях неоднородности и

нелинейности материала. Как частный случай исследована возможность совместного использования непрямых методов приграничных и контактных элементов при моделировании стационарных процессов и некоторых нестационарных процессов в кусочно-однородных средах.

Разработаны подходы к решению сформулированных на основе этих моделей прямых задач теорий геоэлектromagnetизма, теплопроводности и нелинейной упругости с использованием фундаментальных решений полученных систем параболических и эллиптических уравнений, а также интегральных изображений, к которым сведены дифференциальные уравнения модели. Обосновано целесообразность решения полученных дискретно-континуальных моделей прямыми или итерационными методами. Программная реализация предложенных подходов позволила провести вычислительные эксперименты и первичную интерпретацию температурных и геоэлектromagnetных данных при исследовании теплового, квазистационарного и установившегося электромагнитных полей, а также параметров напряженно-деформированного состояния в неоднородных средах.

Численные расчеты и анализ результатов исследований позволили получить новые тепловые, электромагнитные закономерности, которые используются при решении проблем поиска месторождений полезных ископаемых в земной коре, определения местоположения и размеров инородных включений, пустот и дефектов, при проектировании, изготовлении и обеспечении надежной эксплуатации элементов конструкций современной техники. Проведенные вычислительные эксперименты свидетельствуют о целесообразности использования индуктивных импульсных электроразведочных методов для выявления высокопроводных включений типа рудных месторождений и высокоомных включений типа нефтяных и газовых ископаемых. Первичная интерпретация данных показала, что общими благоприятными условиями для выявления и исследования инородных областей с проводимостью, большей или меньшей, чем геосреда, надо считать соизмеримую с горизонтальными размерами (или меньшую) глубину их залегания.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, кусочно-однородные и локально-неоднородные среды, нестационарные процессы, тепловое поле, электромагнитное поле, непрямой метод приграничных элементов, неклассический метод конечных разностей, вычислительный эксперимент.

***Zhuravchak L.M. Mathematical modeling of transmission processes of heat and electromagnetic fields in heterogeneous media by near-boundary element and finite difference methods.*** – Manuscript.

Thesis for a doctoral degree in engineering, specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Politechnic National University, Lviv, 2007.

The thesis is devoted to mathematical modeling of physical processes in piece-wise homogeneous and local heterogeneous media and with non-linear behaviour of materials zones. The modeling is based on a new effective numerical-analytical approach – indirect method of near-boundary elements, combined with non-classical finite differences in the zones of local heterogeneity. As particular case, a possibility is investigated of combined using of indirect methods of boundary and contact elements for modeling of stationary and non- stationary processes in piece-wise homogeneous media.

Non-stationary, stationary and steady physical fields in piece-wise homogeneous and locally heterogeneous objects are modelled with systems of parabolic or elliptic equations, contact conditions on divisions between the zones with different physical characteristics, and the boundary and initial conditions. Numerical-analytical approaches have been developed and applied to solution of direct problems in geo-electromagnetism, heat conduction and non-linear elasticity, using fundamental solutions to the systems of parabolic or elliptic equations and integral representations to which the equations reduce.

**Key words:** mathematical modeling, piece-wise homogeneous media, locally heterogeneous media, non-stationary processes, heat field, electromagnetic field, indirect method of near-boundary elements, non-classic finite differences, computation experiment.